Cahier de vacances de Mathématiques

À destination des futurs étudiants de BCPST1 du lycée Herni Poincaré de Nancy

G. Guillaumé
Lycée Henri Poincaré, Nancy,

P.-W. Martelli
Lycée Henri Loritz, Nancy

Chers étudiants,

Pour aborder sereinement le programme de mathématiques de classe préparatoire, une certaine aisance en calcul est nécessaire. Ce document est conçu pour vous permettre de revoir et surtout de manipuler de manière répétitive des techniques de calcul vues au collège et au lycée. Nous nous appuierons sur ces techniques dès le début de l'année. Ne soyez pas surpris par la simplicité des premiers thèmes abordés : les outils de base doivent être maîtrisés pour que vous puissiez faire des calculs rapidement et sans faute.

Ce document n'est pas une introduction au cours de mathématiques de classe préparatoire. Vous n'y trouverez aucun nouveau théorème et n'y découvrirez aucune nouvelle technique. Ce document n'a pas l'ambition de vous faire réviser de manière exhaustive votre cours de terminale. Il s'articule autour des rappels de cours, des exercices, mais aussi d'une organisation de votre travail. En effet, chaque leçon présente le travail à effectuer sur une ou deux journées au maximum. Il est conseillé de suivre l'ordre des leçons et d'effectuer vos révisions de manière régulière. Après avoir mémorisé le cours , de nombreux exercices sont disponibles pour chaque leçon. Si vous en avez le temps, en particulier lorsque la leçon étudiée est plus courte, prolonger ce travail en faisant quelques exercices d'entraînement supplémentaires (disponibles à la fin du cahier) vous permettra d'être encore plus à l'aise pour votre première année post-baccalauréat. La calculatrice étant <u>interdite</u> au concours : les exercices proposés sont à traités <u>sans calculatrice</u>. Enfin, tous les corrigés sont disponibles en format pdf à l'adresse suivante : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1a-poincare/` dans la rubrique `Mathématiques / Cahier de vacances` Voici quelques conseils pour vous aider à utiliser ce document.

- Avancez à votre rythme dans les calculs. L'objectif principal n'est pas de calculer vite mais de calculer juste. La vitesse viendra lorsque les calculs travaillés seront des réflexes. Atteindre cette dextérité n'est d'ailleurs pas un objectif.
- Traitez les leçons dans l'ordre sans négliger les premières, même si elles vous paraissent sans intérêt. En effet, pour être performant pour étudier les variations d'une fonction, il faut parfaitement maîtriser les techniques de factorisation, de résolution d'inéquations...
- Si on excepte les exercices de « calcul mental », travaillez par écrit, en n'hésitant pas à détailler vos calculs.
- Lorsqu'un exercice a pour objectif de faire plusieurs calculs du même type, lisez le corrigé de chaque calcul avant d'aborder les calculs suivants. Il est en effet inutile de faire trois calculs avec trois fois la même erreur. Lire le corrigé de chaque calcul effectué vous permet d'aborder les calculs suivants avec plus d'assurance.
- Lorsque vous cherchez un exercice de révision, il n'est pas inutile de relire le cours concerné, même si vous êtes sûr de le connaître parfaitement. Par ailleurs, ceux qui font des exercices supplémentaires d'entraînement peuvent résoudre des exercices sur le thème du jour mais aussi sur les leçons passées.
- Entraînez vous régulièrement. Il est inutile de résoudre cinquante équations du second degré pendant une semaine, pour ne plus jamais en croiser une pendant des mois. En particulier, ceux qui chercheront les exercices d'entraînement facultatifs auront intérêt à faire un ou deux calculs de chaque exercice chaque jour (un développement, une factorisation, une manipulation de racine carrée...), plutôt que faire tous les calculs d'un exercice ne proposant que des développements un jour pour faire tous ceux d'un exercice suivant consacré aux racines carrées le lendemain.

Nous vous conseillons enfin de commencer ce cahier durant les trois dernières semaines des vacances scolaires. D'une part, il est important de prendre le temps durant les vacances de se reposer et de ne pas travailler. D'autre part, plus ce travail de préparation sera proche de la rentrée, plus il vous sera profitable.
Enfin, il est fort probable que, malgré nos efforts, quelques coquilles résiduelles figurent dans ce cahier ou dans les corrigés.
Il est toujours possible (et apprécié) de le signaler par mail à `gael.guillaume@ac-nancy-metz.fr`.
Bon travail et bonnes vacances à tous !

Les professeurs de mathématiques de BCPST1

Table des matières

Leçon 1 : Fractions

1.1 Ajouter et soustraire des fractions

- Soient a, b et k trois nombres réels, avec $b, k \neq 0$. On a :
$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}.$$
Pour **simplifier une fraction**, il faut donc trouver un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.
- Soient a, b et c trois nombres réels, avec $c \neq 0$. On a :
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$
Pour **ajouter, ou soustraire, deux fractions**, il faut donc qu'elles soient au même dénominateur (on ajoute alors, ou on soustrait, les valeurs au numérateur).

Exercice 1. Soit a un nombre entier. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (sous forme « la plus simplifiée possible »).

1. $A = \frac{4}{5} + \frac{3}{25}$;

2. $B = \frac{2}{3} + 1$;

3. $C = \frac{5}{12} + \frac{11}{24}$;

4. $D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;

5. $E = \left(\frac{2}{5} + 2\right) + \left(\frac{2}{15} + 3\right) + \frac{3}{10}$;

6. $F = \frac{a}{5} + \frac{3a}{5} + \frac{6a}{5}$;

7. $G = a + \frac{5a}{11} + 3a + \frac{6a}{11}$.

Exercice 2. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$;

2. $B = \frac{15}{30} - \frac{3}{12}$;

3. $C = \frac{5}{12} - \frac{7}{18}$;

4. $D = \frac{4}{25} - \frac{11}{100}$;

5. $E = 7 - \frac{13}{15}$;

6. $F = 3 - \frac{3}{4}$;

7. $G = \frac{25}{6} - 3$.

Exercice 3. Soit a et b deux nombres entiers, avec b non nul. Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \frac{3}{9} + \left(\frac{4}{8} + \frac{10}{12}\right)$;

2. $B = \frac{6}{15} + \left(\frac{15}{20} + \frac{15}{27}\right)$;

3. $C = 2 - \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{30}\right)$;

4. $D = \left(\frac{7}{9} + 5 + \frac{3}{4}\right) - \left(3 + \frac{1}{4} + \frac{5}{6}\right)$;

5. $E = \frac{9a}{7} - \frac{2a}{7}$;

6. $F = \frac{11a}{5} - a$;

7. $G = \frac{2a}{3b} - \frac{a}{15b} + \frac{3a}{10b}$.

1.2 Multiplier des fractions

Soient a, b, c et d quatre nombres réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour **multiplier deux fractions**, on multiplie donc entre eux les numérateurs et les dénominateurs. On en déduit aussi une formule pour **multiplier une fraction par un nombre** :

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}.$$

Exercice 4. Soit a et b deux nombres entiers non nuls. Calculer les produits suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (pour la dernière on se contentera d'une écriture sous forme de fraction).

1. $A = \frac{13}{5} \times 5$; **2.** $B = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$; **3.** $C = \frac{21}{5} \times \frac{15}{7}$;

4. $D = \frac{12}{20} \times \frac{35}{9}$; **5.** $E = 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right)$; **6.** $F = 6 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$;

7. $G = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$; **8.** $H = \left(4 - \frac{3}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)$; **9.** $I = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right)$.

1.3 Diviser des fractions

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs non nuls. On a :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Ainsi **diviser par une fraction** revient à faire le produit par son inverse.

Exercice 5. Calculer les quotients suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \frac{5 + \frac{1}{4}}{7}$; **2.** $B = \frac{8 + \frac{3}{4}}{5}$; **3.** $C = \frac{5 + \frac{6}{9}}{17}$; **4.** $D = \frac{7 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}$;

5. $E = \frac{3 + \frac{7}{9}}{\frac{3}{8}}$; **6.** $F = \frac{4 + \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$; **7.** $G = \frac{3 + \frac{4}{9}}{\frac{1}{6}}$.

Exercice 6. Soit a et b deux nombres réels telles que les quantités suivantes soient bien définies (c'est-à-dire sans division par zéro). Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a}$; **2.** $B = \frac{\frac{5}{2}}{10 + \frac{5}{2}}$;

3. $C = \frac{a}{\frac{ab+3b^2}{2}} \cdot \frac{b}{2a}$; **4.** $D = \frac{1}{\frac{8}{75} - \frac{5}{12}}$.

1.4 Comparer des fractions

Soit a, b et c trois réels avec $\underline{c > 0}$.

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ si et seulement si } a < b$$

Ainsi, **comparer deux fractions** mises au même dénominateur est simple (si le dénominateur est positif, il suffit de comparer les numérateurs).

Soit a, b, c et d quatre réels avec $b > 0$ et $d > 0$. Pour comparer deux fractions, on peut aussi utiliser l'égalité des produits en croix :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad < bc \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad = bc.$$

Exercice 7. Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

1. $\frac{3}{5}...\frac{5}{9}$; **2.** $\frac{12}{11}...\frac{10}{12}$; **3.** $\frac{125}{25}...\frac{105}{21}$.

Exercice 8. Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ?

Exercice 9. On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$. A-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Leçon 2 : Puissances

2.1 Manipulation des puissances

On peut manipuler les puissances dans les produits et les quotients : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, on a :

1. $(x \times y)^n = x^n \times y^n$; **2.** $x^n \times x^p = x^{n+p}$; **3.** $(x^n)^p = x^{n\times p}$;

4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ si $y \neq 0$; **5.** $\dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$ si $x \neq 0$; **6.** $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ si $x \neq 0$.

Attention, les puissances ne sont en général pas compatibles avec la somme ! Par exemple, $4^2 + 5^2 \neq 9^2$. Plus généralement, si n est un entier supérieur à 2, $4^n + 5^n \neq 9^n$.

Il faut faire attention aux signes et aux parenthèses ! Par exemple, $(-2)^4 = 16$, mais $-2^4 = -16$. Plus généralement, si a est un réel et n un entier pair, $(-a)^n \neq -a^n$.

Exercice 10. Calculer les quatre premières puissances entières positives des nombres suivants :

1. $A = 1$; **2.** $B = -1$; **3.** $C = 2$; **4.** $D = -2$; **5.** $E = 3$; **6.** $F = -3$.

Exercice 11. Soit a un nombre réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions proposées.

1. $(-2)^3 2^2$; **2.** $(-5)^2(-5)$; **3.** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$;

4. $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$; **5.** $\dfrac{3^2}{5^2}\left(-\dfrac{2}{9}\right)^2$; **6.** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4\left(-\dfrac{5}{2}\right)$;

7. $a^2 \cdot a^4$; **8.** $a^4 \cdot a^3$; **9.** $a^5 \cdot a$;

10. $-a^3(-a)^5$; **11.** $\left(2^2\right)^3$; **12.** $\left((-3)^2\right)^3$;

13. $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^3$; **14.** $\left(\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3\right)^2$; **15.** $\left(\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\right)^3$;

16. $\left(-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right)^3$; **17.** $\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\right)^3$; **18.** $\left[(-3)^3 \cdot 5^2\right]^2$;

19. $\left[3^3 \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\right)^2\right]^2$; **20.** $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2\right]^2$; **21.** $\left[(-2)\cdot 10^3\left(-\dfrac{1}{5}\right)^4\right]^2$;

22. $\left[-27 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^2$

Exercice 12. Soit a un nombre réel quelconque. Simplifier les expressions suivantes sous la forme $\pm a^n$ ou $\pm\dfrac{1}{a^n}$, où n est un entier naturel.

1. $\dfrac{(-a)^5}{a^3}$; **2.** $\dfrac{(-a)^6}{(-a)^3}$; **3.** $\dfrac{(-a)^9}{(-a)}$; **4.** $\dfrac{(-a)^{2022}}{a}$;

5. $a^3 \cdot a^{-5}$; **6.** $a^{-2} \cdot a^{-3}$; **7.** $a^{-2} \cdot a^4$; **8.** $a^2 \cdot a^{-1}$;

9. $\dfrac{a^3}{a^{-5}}$; **10.** $\dfrac{a^{-4}}{a^{-2}}$; **11.** $\dfrac{a^4}{a^{-3}}$; **12.** $\dfrac{a^{-3}}{a^{-4}}$.

Exercice 13. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles ou d'entiers.

1. $\dfrac{1}{(-2)^{-1}}$; **2.** $-\dfrac{1}{5^{-1}}$; **3.** $-\dfrac{1}{6^{-3}}$;

4. $\dfrac{1}{6^3}$; **5.** $(-1)^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^3$; **6.** $(-3)^{-1} \cdot 6^2 \cdot 4^{-2}$;

7. $10^{-5} \cdot 10^3$; **8.** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} (-1)^2 \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$; **9.** $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$;

10. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3 \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 \left(-\dfrac{3}{7}\right)^{-3}$; **11.** $\dfrac{25^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{30^6}$; **12.** $\dfrac{9^{-2} \cdot 4^2}{3^{-3} \cdot 6^{-2}}$;

13. $\dfrac{49^{-2} \cdot 5^6 \cdot 2^3}{7^{-3} \cdot 125^3 \cdot 12}$; **14.** $\dfrac{4^2 \cdot (-12)^2}{(-2)^3 \cdot 6^{-2} \cdot 3^3}$; **15.** $\dfrac{10^{-5} \cdot 25^3}{(-1)^{2022} \cdot 2^{-4}}$.

Exercice 14. Soit n un entier naturel. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles ou d'entiers.

1. $\dfrac{4^3}{2^8}$; **2.** $\dfrac{25^3}{(-5)^6}$; **3.** $\dfrac{9^{-1}}{3^{-2}}$; **4.** $\dfrac{4^{65}}{2^{128}}$;

5. $\dfrac{8^{-5}}{64^{-3}}$; **6.** $\dfrac{12^{-4\ 027}}{144^{-2\ 014}}$; **7.** $\dfrac{2^{2n}}{4^n}$; **8.** $\dfrac{3^{3n}}{27^{3n+1}}$;

9. $\dfrac{125^{n+1}}{5^{3n-1}}$; **10.** $\dfrac{144^{n-1}}{(12)^{2(n+1)}}$.

2.2 Révision des leçons précédentes

Exercice 15. Soient a et b deux nombres réels, avec b non nul. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $A = \dfrac{2}{15} + \dfrac{3}{10}$; **2.** $B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$;

3. $C = \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3}$; **4.** $D = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{42}$;

5. $E = \left(\dfrac{4}{9} + 2\right) + \dfrac{2}{3} + \left(2 + \dfrac{1}{12}\right)$; **6.** $F = 3a + \dfrac{4a}{7} + \dfrac{a}{14}$;

7. $G = \dfrac{3a}{2b} + \dfrac{a}{3b} + \dfrac{5a}{2b} + \dfrac{2a}{3b}$.

Exercice 16. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{5}$; **2.** $B = \dfrac{18}{12} - \dfrac{15}{10}$; **3.** $C = \dfrac{17}{60} - \dfrac{17}{75}$;

4. $D = 2 - \dfrac{11}{8}$; **5.** $E = \dfrac{52}{15} - 3$; **6.** $F = 5 - \dfrac{17}{5}$;

7. $G = \dfrac{13}{4} - 2$.

Leçon 3 : Racines carrées

3.1 Calculs avec la racine carrée

Pour simplifier une racine carrée, on peut utiliser le résultat suivant, valable pour un réel a :

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a \leq 0 \end{cases}$$

De plus, on dispose des formules suivantes, valables pour tous réels positifs x et y :

1. $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$;

2. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ si $y > 0$.

Attention, il n'y a pas de formule pour simplifier $\sqrt{x+y}$. Par exemple, $5 = \sqrt{3^2 + 4^2} \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4$.

Pour simplifier une racine carrée de la forme $\sqrt{n}$ (où n est un entier naturel), l'idée est décrire n sous la forme $a^2 b$ (où a et b sont des entiers naturels), de sorte que $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$. Par exemple, pour simplifier $\sqrt{8}$, on écrit $8 = 2^2 \times 2$, de sorte que $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Ces formules ressemblent à celles rappelées dans la leçon sur les puissances. C'est naturel puisque, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (on étudiera cela plus en détail cette année).

Exercice 17. Simplifier au maximum les nombres suivants.

1. $\sqrt{1000}$;
2. $\sqrt{125}$;
3. $\sqrt{27}$;
4. $\sqrt{30^{50}}$;
5. $\sqrt{5} \times \sqrt{45}$;
6. $(\sqrt{8})^5$;
7. $\sqrt{27^3}$;
8. $\sqrt{8} \times \sqrt{162}$.
9. $\sqrt{(-1)^4}$;
10. $\sqrt{(-2)^3 \cdot (-18)}$;
11. $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$;
12. $\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \cdot \dfrac{27}{50}}$.

3.2 Déterminer le signe d'une expression avec une racine carrée

Soit x, y et z trois réels positifs (on rappelle qu'on ne peut considérer que la racine carrée d'un nombre positif ; la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

1. On a $\sqrt{x} \geq 0$.
2. Si $x \leq y$, alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ (cela provient de la croissance de la fonction racine carrée).
3. On peut généraliser : si $x \leq y \leq z$, alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{z}$.

Le troisième point peut être utile pour obtenir une approximation d'une racine carrée. Par exemple, $4 \leq 7 \leq 9$, donc $\sqrt{2^2} \leq \sqrt{7} \leq \sqrt{3^2}$, ce qui signifie que $2 \leq \sqrt{7} \leq 3$.

Exercice 18. Déterminer le signe des réels suivants.

1. $\sqrt{7}$;
2. $\sqrt{\sqrt{5}}$;
3. $\sqrt{2} - \sqrt{3}$;
4. $\sqrt{2\,022} - \sqrt{2\,021}$;
5. $\sqrt{7} + \sqrt{2}$;
6. $\sqrt{11} - 2$;
7. $\sqrt{5} - 2$;
8. $2 + \sqrt{5}$.

Exercice 19. Exprimer sans racine carrée les nombres suivants.

1. $\sqrt{(-5)^2}$;
2. $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$;
3. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;
4. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$;
5. $\sqrt{(3-\pi)^2}$;
6. $\sqrt{(3-a)^2}$.

3.3 Utilisation de la quantité conjuguée

On rappelle que si a et b sont des nombres positifs, la **quantité conjuguée** de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. De plus, la quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Pour simplifier une fraction avec des racines carrées (et rendre rationnel son dénominateur), on multiplie par l'expression conjuguée du dénominateur. Par exemple,

$$\frac{\sqrt{(-1)^2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1\times(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1.$$

Exercice 20. Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

1. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$;
2. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$;
3. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;
4. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;
6. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$;
7. $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;
8. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$.

3.4 Montrer une égalité avec des racines carrées

Pour montrer que deux quantités a et b sont égales, on peut vérifier que $a^2=b^2$ et que a et b sont de même signe.

Exercice 21. Démontrer les égalités suivantes.

1. $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$;
2. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$;
3. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

3.5 Révision des leçons précédentes

Exercice 22. Soit a et b deux nombres réels, avec b non nul. Calculer les produits suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A=\dfrac{3}{1000}\times 100$;
2. $B=\dfrac{3\pi}{4}\times\dfrac{6}{\pi}$;
3. $C=\dfrac{121}{22}\times\dfrac{4}{55}$;
4. $D=\dfrac{144}{125}\times\dfrac{75}{16}$;
5. $E=3\cdot\left(\dfrac{6}{9}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{7}\right)$;
6. $F=7\cdot\left(\dfrac{4}{14}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{9}\right)$;
7. $G=\left(5+\dfrac{3}{8}\right)\left(1+\dfrac{5}{8}\right)$;
8. $H=\left(\dfrac{7}{15}-\dfrac{4}{30}\right)\cdot\left(6+\dfrac{3}{4}\right)$.

Exercice 23. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

1. $10^5 \cdot 10^3$; **2.** $(10^5)^3$; **3.** $\dfrac{10^5}{10^3}$;

4. $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$; **5.** $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$; **6.** $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$.

Leçon 4 : Développement et factorisation

4.1 Développement et réduction d'expressions littérales

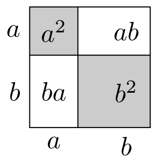
Développer et réduire une expression consiste à écrire cette expression sous la forme d'une somme de termes. Si l'expression contient uniquement une variable x, on impose de plus que chaque puissance de x apparaisse dans au plus un terme de la somme.

Pour développer un expression, on peut utiliser les formules de distributivités suivantes, valable pour a, b, c et d des réels quelconques.

$$a \times (c + d) = ac + ad. \qquad (a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

On dispose également de trois « identités remarquables », à connaître par cœur !

Illustration de la première identité.



1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Exercice 24. Soit x, a, b et c quatre réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = \left(x^2 - x\right)(x+1)$;
2. $B = \left(2x^2 + x - 4\right)(x+2)$;
3. $C = \left(2x^2 + 3 - 4x\right)(2x+4)$;
4. $D = \left(4x^3 + 5x^2 - \dfrac{3}{2}x\right)\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right)$;
5. $E = (x+1)(x-2)(x-3)$;
6. $F = (3x-2)(2x+3)(5-x)$;
7. $G = (x-a)(x+b)(x-c)$;
8. $H = b(x+a-b) - a(x+b-a) - a^2 - b^2$;
9. $I = (x-1)(x-a+b) - (1-x)(x+a-b) - 2(x+a-b)(x-a+b)$;
10. $J = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{a}{4}\right)(4x+16a)$.

Exercice 25. Soit x un réel. Développer les expressions suivantes.

1. $A = (6-3x)^2$;
2. $B = (1+8x)^2$;
3. $C = (4x+5)(5-4x)$;
4. $D = (7-4x)^2$;
5. $E = (-2x-9)^2$;
6. $F = (6-2x)(6+2x)$;
7. $G = \left(3x - \dfrac{4}{3}\right)^2$;
8. $H = \left(2x - \dfrac{5}{2}\right)^2$;
9. $I = (7x-3)(7x+3) - (8x+5)(8x-5)$;
10. $J = (5x-3)^2 - (3x-7)^2$.

Exercice 26. Soit x et y deux réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = (x+1)(2x-3)(x+2)$;
2. $B = (1-2x)^3$;
3. $C = (x+y+1)^2$;
4. $D = (x-y)(x+3y) - (x+y)(x-4y) + 2(x-2y)^2$.

4.2 Factorisation

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit.

Pour factoriser une expression, on peut chercher d'abord à utiliser la première formule de distributivité présentée dans le paragraphe précédent (on rappelle que a, c et d sont des réels quelconques).

$$\boxed{a} \cdot \underline{c} + \boxed{a} \cdot \underline{d} = \boxed{a} \cdot (\underline{c+d}).$$

Par exemple, si x et y sont des réels, on a

$$4x^2y^3 - 3xy^2 = \boxed{xy^2} \cdot \underline{4xy -} \boxed{xy^2} \cdot \underline{3} = \boxed{xy^2} \cdot \left(\underline{xy^2 - 3}\right).$$

Exercice 27. Soit x, y, a, b, c et d des réels. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = 8a^2 - 24a + 32a^3$;
2. $B = 3a^2x - 6ax^2 + 12abx$;
3. $C = 5a^4b^3 + 2a^2x^3 - 3a^2b^5$;
4. $D = a^6x^4 - 6a^5x^6 + 9a^4x$;
5. $E = 8x^2y^3 - 3xy^4 + 24x^2y^5$;
6. $F = 15a^2b^2 - 30a^2b^3 + 105a^2b^4 - 75a^2b^5$;
7. $G = 6a^4b^3c^2d - 2a^3b^4cd + 8a^5b^2d^3$.

Exercice 28. Soit x un réel. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = (2x-3)(5x-1) - (2x-3)(x+1)$;
2. $B = (7x-1)^2 - (7x-1)(3x+2)$;
3. $C = (4-3x)(2+3x) - 2(1-2x)(3x-4)$;
4. $D = (3x+1)(2x-3) + (3x+1)(x+2) - (5x+4)(3x+1)$;
5. $E = (x-8)(4x-1) + x^2 - 8x$;
6. $F = x^2 - x + (x+1)(1-x)$.

Pour factoriser une expression, on peut aussi utiliser les deux premières identités remarquables (on rappelle que a et b sont des réels).

On développe

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On factorise

On développe

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

On factorise

Exercice 29. Soit a, b, x et y quatre réels. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = a^4 + 4a^2b + 4b^2$;
2. $B = 4a^2 - 12ab + 9b^2$;
3. $C = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$;
4. $D = 9a^2 + \dfrac{b^2}{4} + 3ab$;
5. $E = 9x^2 - 6x + 1$;
6. $F = 4x^2 + 4x + 1$;
7. $G = 4x^2 + 12xy + 9y^2$;
8. $H = 2x^2 - 12x + 18$
9. $I = 9b^2 + 6ab + a^2$;
10. $J = 64a^6 - 16a^3b + b^2$;
11. $K = x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2$;
12. $L = (1-x)^2 + 6x + 3$.

On peut enfin utiliser la troisième identité remarquable :

On développe

$$(a-b)(a+b) \quad = \quad a^2 - b^2$$

On factorise

Exercice 30. Soit a, x et y trois nombres réels non nuls. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = a^2 - 25$;
2. $B = 4x^2 - 1$;
3. $C = 9x^2 - 4y^2$;
4. $D = 25a^2 - 16b^2$;
5. $E = 5x^3 - 80x$;
6. $F = 4x^2 - a^2y^2$;
7. $G = 49x^2 - 25$;
8. $H = (a+1)^2 - a^2$;
9. $I = 9x^2 - (x+2)^2$;
10. $J = \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{x^2}{25}$;
11. $K = \dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{9b^2}{y^2}$;
12. $L = (3x-4y)^2 - \dfrac{25}{4}$;
13. $M = \dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{x^2}{16}$;
14. $N = (x+3)^2 - (x+1)^2$;
15. $O = (a+b)^2 - (a-b)^2$;
16. $P = (2x+1)^2 - (3x-4)^2$;
17. $Q = (2x+3)^2 - (1-4x)^2$;
18. $R = (3x-4)^2 - 4(x+2)^2$;
19. $S = 4(2x+3)^2 - (3x-2)^2$;
20. $T = 25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2$;
21. $U = \left(x^2 - 16\right)^2 - (x+4)^2$.

4.3 Révision des leçons précédentes

Exercice 31. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n, avec a et n deux entiers relatifs.

1. $3^4 \cdot 5^4$;
2. $(5^3)^{-2}$;
3. $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$;
4. $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$;
5. $\dfrac{6^5}{2^5}$;
6. $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$.

Leçon 5 : Résolution d'équations

5.1 Résoudre une équation du premier degré

Pour résoudre une équation du premier degré (c'est-à-dire une équation qui peut se ramener à la forme $ax + b = 0$, où a, b sont des réels fixés et x est l'inconnue réelle de l'équation), on rappelle que la méthode consiste à « mettre les termes avec x du même côté du signe = » puis « mettre les termes constants (sans x) de l'autre côté » puis à « isoler x ». Par exemple, si on veut résoudre l'équation $x + 3 = 7 - x$, on peut procéder comme suit :

$$\boxed{x+3} = \boxed{7-x}$$

on ajoute x | on ajoute x

$$\boxed{2x+3} = \boxed{7}$$

on soustrait 3 | on soustrait 3

$$\boxed{2x} = \boxed{4}$$

on divise par 2 | on divise par 2

$$\boxed{x} = \boxed{2}$$

Pour rédiger correctement ce calcul, il faut penser à deux choses. La première est d'introduire l'inconnue avec « soit $x \in \mathbf{R}$ » (ici x peut prendre n'importe quelle valeur réelle). La seconde est qu'il ne faut pas oublier de donner l'ensemble des solutions. Pour une équation du premier degré, il n'y a que trois possibilités :

1. l'équation a une unique solution $\{x_0\}$, dans ce cas l'ensemble des solutions est $\{x_0\}$ (il faut utiliser des accolades et rien d'autre !) ;

2. l'équation n'admet pas de solution, dans ce cas l'ensemble des solutions est $\emptyset$ (l'ensemble vide) ;

3. l'équation admet n'importe quel réel pour solution, dans ce cas l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}$.

Dans le cas de l'exemple précédent, on rédigera donc la résolution comme suit.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x + 3 &= 7 - x \\ 2x + 3 &= 7 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{2\}$.

Exercice 32. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $x + 3 = 2$;
2. $-5 + x = 4$;
3. $3x = 2$;
4. $-5x = 4$;
5. $-4x = -10$;
6. $3 - x = -8$;
7. $2x + 4 = 5x - 7$;
8. $\frac{2}{3}x - 5 = \frac{1}{2}x - 3$;
9. $x + 4 = x - 7$;
10. $2x + 5 = 2(x + 2) + 1$;
11. $(x + 1)^2 = (x + 2)^2$;
12. $2x + 3 = 4x + 6$;
13. $2x + 3 = 4x + 7$;
14. $13 + \frac{3}{2}x = 1$;
15. $4x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x + 2$;

16. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$; **17.** $\frac{x-3}{5} = \frac{3}{8}$; **18.** $\frac{2x-3}{7} = \frac{x-1}{3}$.

5.2 Résoudre une équation par factorisation

Pour résoudre une équation par factorisation :

- on se ramène à une équation du type $A(x) = 0$ d'inconnue x,
- on factorise alors au maximum $A(x)$ (si jamais aucun facteur n'est visible, il est parfois intéressant de développer pour voir si, en réduisant, des termes se simplifient), en pensant, notamment, aux identités remarquables,
- on peut alors utiliser qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple : Résoudre l'équation $(x-1)(3x+2) = (x-1)(5x-4)$.
Cette équation est équivalente à $(x-1)(3x+2) - (x-1)(5x-4) = 0$.
On peut alors factoriser par $(x-1)$:

$$\begin{gathered}(x-1)(3x+2) - (x-1)(5x-4) = 0\\ (x-1)[(3x+2) - (5x-4)] = 0\\ (x-1)(3x+2-5x+4) = 0\\ (x-1)(-2x+6) = 0\end{gathered}$$

Or, pour que ce produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que le premier facteur ou le second soit nul :

$$\begin{gathered}x-1 = 0 \text{ ou } -2x+6 = 0\\ x = 1 \text{ ou } x = 3\end{gathered}$$

Il y a exactement deux solutions : 1 et 3.

Remarquons que la stratégie consistant à simplifier par $(x-1)$ au début de la résolution amène à oublier une solution :

$$\begin{gathered}(x-1)(3x+2) = (x-1)(5x-4) = 0\\ 3x+2 = 5x-4\\ 6 = 2x\\ x = 3\end{gathered}$$

En effet, simplifier par $(x-1)$ signifie diviser de part et d'autre par $x-1$, ce dernier devant être non-nul. Dans l'étape de simplification, on suppose donc que $x \neq 1$, ce qui nous a fait perdre cette solution. Cette technique est donc à proscrire.

Exemple : Résoudre l'équation $(x^3 - x)(x-2) = (x-1)(8x^2 - 4x)$.
On applique la méthode précédente :

$$\begin{gathered}(x^3 - x)(x-2) = (x-1)(8x^2 - 4x)\\ x(x^2-1)(x-2) - (x-1)(8x^2-4x) = 0\\ x(x^2-1)(x-2) - (x-1)4x(x-2) = 0\\ x(x-1)(x+1)(x-2) - 4x(x-1)(x-2) = 0\\ x(x-1)(x-2)(x+1-4) = 0\\ x(x-1)(x-2)(x-3) = 0\end{gathered}$$

Les solutions sont donc $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 = 16$.
Appliquons notre méthode, en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$x^2 = 16$$
$$x^2 - 4^2 = 0$$
$$(x-4)(x+4) = 0$$
$$x = 4 \text{ ou } x = -4$$

Il y a exactement deux solutions : 4 et -4.

Dire que la seule solution est 4 est erroné !!! De manière générale, l'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Exercice 33. Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2(x+1) = 4(x+1)$

2. $(3x+2)^2 = (x+1)^2$

3. $(x-5)(x-7) = (x-5)^2$

4. $(2x-3)(5x+1)(5-2x) = 0$

5. $2(x+2)(x-4) = x^2 - 4$

6. $(3x-1)(5x-4) = 25x^2 - 16$

7. $3x(1-3x) = 0$

8. $\left(\dfrac{2x-5}{3}\right)^2 \left(\dfrac{4x}{5} - \dfrac{3}{7}\right) = 0$

9. $4x^4 - 1 = 2x^2 + 1$

10. $9x^2 + 1 = 6x$

Exercice 34. Résoudre les équations suivantes :

1. $(x-1)(x-2) + (x-1)(x-3) = 2(x-2)(x-3)$
2. $(x-a)(x-2a)(x+a) = x^3 + 2a^3$
3. $(\frac{1}{2} - x)(5x+3) + 3x(2x-1) = 0$
4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
5. $\sqrt{2}x^4 - 4x^2 = -2\sqrt{2}$

5.3 Équations polynomiales de degré 2

On appelle équation polynomiale de degré 2 une équation d'inconnue réelle x du type :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b, c sont des réels, nommés coefficients, avec $a \neq 0$.
Pour résoudre une équation polynomiale de degré 2 :

1. on identifie les réels a, b, c,
2. on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
3. il y a trois cas possibles :
   - **(a)** si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$,
   - **(b)** si $\Delta = 0$ alors il y a une seule solution $x = \dfrac{-b}{2a}$,
   - **(c)** si $\Delta < 0$ alors il n'y a aucune solution réelle.

Exercice 35. Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2 - 5x + 1 = 0$

2. $-4x + 2x^2 - 3 = 0$

3. $x^2 + x = -1$

4. $5x^2 - 4x + 1 = 0$

5. $x^2 - 6x + 9 = 0$

6. $\dfrac{x^2}{4} + x + 1 = 0$

7. $-2x^2 - 3x + 6 = 0$

8. $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

9. $\frac{3}{4}x^2 + \sqrt{7}x - 3 = 0$

10. $7x^2 + 6x = 1$

Exercice 36. m désigne un nombre réel. Soit (E_m) l'équation $(m-1)x^2+2mx+m+2 = 0$ d'inconnue réelle x.

1. Résoudre les équations (E_0) (c'est à dire l'équation précédente pour $m = 0$) et l'équation (E_1) (c'est à dire l'équation (E_m) pour $m = 1$)

2. Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 0$ comme solution ? Donner l' éventuelle autre solution.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de m, l'équation (E_m) admet-elle :

- **(a)** une unique solution ?
- **(b)** deux solutions distinctes ?
- **(c)** aucune solution réelle ?

5.4 Résoudre une équation avec un quotient

Une équation avec un quotient est une équation d'inconnue réelle x du type :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

où $A(x), B(x)$ sont des expressions en fonction de x.
Pour résoudre une équation avec un quotient :

1. on détermine tous les réels qui annulent $B(x)$,

2. on résout $A(x) = 0$.

3. Les solutions sont les réels trouvés à l'étape précédente parmi lesquels on a ôté, éventuellement, les réels annulant $B(x)$, obtenus à la première étape.

Exemple : Résoudre $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = 0$.

1. les réels qui annulent $x^2 - 1$ vérifient $x^2 - 1 = 0$ c'est à dire $(x - 1)(x + 1) = 0$: on trouve donc 1 et -1,

2. on résout $A(x) = 0$ c'est à dire $2x^2 + x - 3 = 0$. C'est une équation polynomiale du second degré avec $\Delta = 25$: on trouve deux réels : 1 et $\frac{-3}{2}$.

3. Comme 1 annule le dénominateur mais que le réel $\frac{-3}{2}$ ne l'annule pas, l'unique solution est $\frac{-3}{2}$.

Exemple : Résoudre $\frac{2x - 3}{x - 1} = 0$.

1. le seul réel qui annule $x - 1$ est 1,

2. on résout $A(x) = 0$ c'est à dire $2x - 3 = 0$. On obtient un unique réel : $\frac{3}{2}$.

3. Comme $\frac{3}{2}$ n'annule pas le dénominateur, l'unique solution est $\frac{3}{2}$.

Exemple : Résoudre $\frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{x - 1}{x + 2}$.

On se ramène à une équation quotient du type $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

$$\frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{x - 1}{x + 2}$$
$$\frac{2x - 3}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 2} = 0$$
$$\frac{(2x - 3)(x + 2) - (x - 1)^2}{(x - 1)(x + 2)} = 0$$

1. les réels qui annulent $(x-1)(x+2)$ sont 1 et -2.
2. on résout $A(x)=0$ c'est à dire $(2x-3)(x+2)-(x-1)^2=0$. Il n'y pas de facteur commun, on développe !

$$\begin{aligned}(2x-3)(x+2)-(x-1)^2&=0\\ 2x^2+4x-3x-6-(x^2-2x+1)&=0\\ x^2+3x-7&=0\end{aligned}$$

C'est une équation polynomiale de degré deux avec un discriminant $\Delta=37$. On identifie alors deux solutions : $\dfrac{-3-\sqrt{37}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{37}}{2}$.

3. Ces deux solutions étant différentes de 1 et -2 En effet $6<\sqrt{37}<7$ donc $\dfrac{3}{2}<\dfrac{-3+\sqrt{37}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{37}}{2}<-\dfrac{9}{2}$: ces deux solutions sont donc bien différentes de 1 et -2. Finalement, il y a deux solutions à l'équation : $\dfrac{-3+\sqrt{37}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{37}}{2}$.

On peut utiliser un produit en croix à condition de bien prendre en compte, auparavant que les éventuels réels annulant la dénominateur ne peuvent être solutions.
Ainsi, dans notre exemple précédent, on peut, à l'aide d'un produit en croix, écrire que, pour $x\neq 1$ et $x\neq -2$, notre équation initiale se ramène à $(2x-3)(x+2)=(x-1)^2$. En développant et en réduisant, on aboutit de nouveau à $x^2+3x-7=0$.

Exercice 37. Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{2x+8}{5-2x}=0$
2. $\dfrac{3x+1}{2+6x}=0$
3. $\dfrac{10x-15}{12-8x}=0$
4. $\dfrac{(-6x+5)(3x-1)}{(7+3x)(6x-2)}=0$
5. $\dfrac{(-x+5)(3x-1)}{(2+3x)(-7x-3)}=0$
6. $\dfrac{(2x+1)(5x-4)(8x-6)}{(-4x+3)(-6x-3)}=0$

Exercice 38. Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{2}{3x+1}=5$
2. $\dfrac{3x+1}{6-5x}=2$
3. $\dfrac{9-x^2}{x-3}=0$
4. $\dfrac{3}{(x-1)(6x-2)}=\dfrac{4}{1-2x}$
5. $\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x-2}=3$
6. $\dfrac{2x^2+1}{3+x}=2x$
7. $\dfrac{1}{1-2x}+4=\dfrac{-4x}{2-x}$
8. $\dfrac{x}{3x-1}=\dfrac{3x-1}{x}$

Exercice 39. Soit (E) l'équation $2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=0$.

1. Montrer que 0 n'est pas solution de (E).
2. Montrer que (E) peut s'écrire $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+8=0$.
3. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si $X=x+\dfrac{1}{x}$ vérifie $2X^2-9X+4=0$.
4. Donner les solutions de cette dernière équation puis en déduire les solutions de (E).

5.5 Révision des leçons précédentes

Exercice 40. Soit x, y et z trois réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A_1 = (2x - y)(x + 2y)$.
2. $A_2 = (2x + 1)(3 - x)(x + 2)$.
3. $A_3 = (x + 2y)^2 - (2xy - 1)^2 + 4x(x - 2y)$.
4. $A_4 = (x + y + z)^2$.
5. $A_5 = (-x + y - 1)(x - y - 1)$.
6. $A_6 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{(1 + 2y)^2}{4} - (x - y)^2$.

Leçon 6 : Résolution d'inéquations

6.1 Résoudre une inéquation du premier degré

On note a, b des réels fixés avec $a \neq 0$. Résoudre l'inéquation $ax+b \geqslant 0$ d'inconnue réelle x consiste à déterminer tous les réels x vérifiant $ax+b \geqslant 0$. Il en est de même pour les inéquations $ax+b \leqslant 0$, $ax+b<0$ ou $ax+b>0$. Distinguons deux cas :

$\boxed{a>0}$ Dans ce cas, on obtient

$$\begin{gathered} ax+b \geqslant 0 \\ ax \geqslant -b \\ x \geqslant \frac{-b}{a} \end{gathered}$$

L'ensemble solution est donc $\left[\frac{-b}{a};+\infty\right[$.

$\boxed{a<0}$ Dans ce cas, on est amené, lors de la dernière étape, à changer l'ordre car on divise par $a<0$.

$$\begin{gathered} ax+b \geqslant 0 \\ ax \geqslant -b \\ x \leqslant \frac{-b}{a} \end{gathered}$$

L'ensemble solution est donc $\left]-\infty;\frac{-b}{a}\right]$.

Exemple : Résoudre $4x-5<5x+2$

On peut procéder de diverses manières. On peut se ramener aux cas précédents :

$$\begin{gathered} 4x-5<5x+2 \\ 0<5x-4x+2+5 \\ 0<x+7 \\ -7<x \end{gathered}$$

On peut également procéder ainsi :

$$\begin{gathered} 4x-5<5x+2 \\ -5-2<5x-4x \\ -7<x \end{gathered}$$

Dans tous les cas, l'ensemble solution $\mathcal{S}$ est $\boxed{]-7;+\infty[}$.

Exercice 41. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-5x+2 \geqslant 0$

2. $4x-3 \leqslant 0$

3. $\frac{7x+5}{5}<0$

4. $\frac{-4x}{3}-\frac{1}{4}>0$

5. $5x+2<-3x+4$

6. $-7x-8>5x-6$

7. $-\sqrt{2}x-\sqrt{3} \geqslant 2x+\sqrt{6}$

8. $\frac{-3x}{4}+\frac{5}{7} \leqslant \frac{4}{3}-\frac{2x}{5}$

9. $10^{-2}x-1<10^{-3}-\frac{x}{10^4}$

10. $-3x+7<\frac{5x}{3}$

Exercice 42. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x + 7 \geqslant 0$

2. $3(x-1) \leqslant 1 - 2x$

3. $\dfrac{1-3x}{5} < 0$

4. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4-x}{4} > 5$

5. $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{1-x}{2} \geqslant \dfrac{2(2-x)}{3}$

6. $-\sqrt{6}x - 2 > -\sqrt{2}(x+1)$

https ://www.overleaf.com/project/62a19c778cbe1d1af261b039

Exercice 43. m désigne un nombre réel. Déterminer, selon les valeurs de m, l'ensemble solution de l'inéquation (E_m) : $\dfrac{2x+m}{x-3} \leqslant 1$ d'inconnue réelle x.

6.2 Résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de signes

Pour résoudre une équation par factorisation :

- on se ramène à une inéquation du type $A(x) \geqslant 0$ (ou $A(x) \leqslant 0$ ou $A(x) < 0$ ou $A(x) < 0$) d'inconnue x,
- on factorise alors au maximum $A(x)$ (si jamais aucun facteur n'est visible, il est parfois intéressant de développer pour voir si, en réduisant, des termes se simplifient), en pensant, notamment, aux identités remarquables,
- on peut faire un tableau de signes pour l'expression factorisée puis y lire l'ensemble solution.

Exemple : Résoudre l'inéquation $(x-1)(3x+2) > (x-1)(5x-4)$.
Cette inéquation est équivalente à $(x-1)(3x+2) - (x-1)(5x-4) > 0$.
On peut alors factoriser par $(x-1)$:

$$\begin{gathered}(x-1)(3x+2) - (x-1)(5x-4) > 0\\ (x-1)[(3x+2) - (5x-4)] > 0\\ (x-1)(3x+2-5x+4) > 0\\ (x-1)(-2x+6) > 0\end{gathered}$$

On établit alors le tableau de signes de $(x-1)(-2x+6)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x + 6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit alors que $(x-1)(-2x+6) > 0$ uniquement lorsque $1 < x < 3$. L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de cette inéquation est donc

$$\boxed{\mathcal{S} =]1;3[}$$

Exemple : Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-3}{3-x} \leqslant 1$.
Cette inéquation est équivalente à

$$\begin{gathered}\frac{2x-3}{3-x} - 1 \leqslant 0.\\ \frac{2x-3}{3-x} - \frac{3-x}{3-x} \leqslant 0.\end{gathered}$$

$$\frac{2x-3-3+x}{3-x} \leqslant 0.$$
$$\frac{3x-6}{3-x} \leqslant 0$$

On établit alors le tableau de signes de $\dfrac{3x-6}{3-x}$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$3x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{3x-6}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On lit alors que $\dfrac{3x-6}{3-x} \leqslant 0$ uniquement lorsque $x \leqslant 2$ ou $x > 3$. L'ensemble $\mathcal{S}$ de cette inéquation est donc

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; 2] \cup]3; +\infty[}$$

Lorsqu'une valeur annule le dénominateur, elle ne peut être solution : on symbolise cela par une double-barre.

Exercice 44. Résoudre les équations suivantes :

1. $4x^3 - x > 2x^2 + x$
2. $x^2 < 7$
3. $x^2 > 5$
4. $\dfrac{5x-1}{2-3x} \geqslant 2$
5. $(2x+1)^2(5x-3) > 0$
6. $\dfrac{2}{x-4} > \dfrac{-3}{x+1}$
7. $(x+1)^2(5x-2) < (2x+2)^2(4x-3)$
8. $\dfrac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x} < 0$
9. $(x^3-9x)(x+1) > 0$

6.3 Résoudre une inéquation polynomiale de degré 2

On appelle inéquation polynomiale de degré 2 une équation d'inconnue réelle x du type :

$$ax^2+bx+c \geqslant 0 \text{ ou } ax^2+bx+c \leqslant 0 \text{ ou } ax^2+bx+c < 0 \text{ ou } ax^2+bx+c > 0$$

où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$.
Pour résoudre une inéquation polynomiale de degré 2 :

1. on identifie les réels a, b, c,
2. on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
3. il y a trois cas possibles :
   (a) si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Notons x_1 la plus petite des solutions et x_2 la plus grande. Le tableau de signe de $ax^2+bcx+c$ est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

(b) si $\Delta = 0$ alors il y a une seule solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$, le tableau de signe de $ax^2+bcx+c$ est donné par :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

(c) si $\Delta < 0$ alors il n'y a aucune solution réelle. Le tableau de signe de $ax^2+bcx+c$ est donné par :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Exemple : Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8} \leqslant 0$.
Le numérateur est x^2-4x+3 avec $\Delta = 4, x_1 = 1, x_2 = 3$ et $a = 1 > 0$ d'où :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le dénominateur est $-x^2+6x-8$ avec $\Delta = 4, x_1 = 2, x_2 = 4$ et $a = -1 < 0$ d'où :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Récapitulons :

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+6x-8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;1] \cup]2;3] \cup]4;+\infty[}$$

Exercice 45. Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2-5x+1<0$

2. $-4x+2x^2-3<0$

3. $x^2+x \geqslant -1$

4. $5x^2-4x+1 \leqslant 0$

5. $x^2-6x+9 \leqslant 0$

6. $\frac{x^2}{4}+x+1>0$

7. $-2x^2-3x+6 \leqslant 0$

8. $\sqrt{2}x^2-3x+\sqrt{2} \geqslant 0$

9. $\frac{3}{4}x^2+\sqrt{7}x-3>0$

10. $7x^2+6x<1$

Exercice 46. Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{-x^2-5x-1}{x^2-4x+4} \geqslant 1$
2. $\dfrac{-x^2-5x-1}{x+1} > 2x+1$
3. $(3x-1)^2 > 2x+3$
4. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x} \leqslant -2$
5. $\dfrac{x+4}{2x-1} \geqslant 2x$
6. $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2} \leqslant 1$
7. $\dfrac{-x^2+5x+4}{7x^2-4x-3} < 0$

Exercice 47. m désigne un nombre réel. Déterminer, selon les valeurs de m, l'ensemble solution de l'inéquation $(E_m) : 2m^2 + (5-3x)m + x^2 > 3x - 2$ d'inconnue réelle x.

6.4 Révision des leçons précédentes

Exercice 48. Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

1. $(2\sqrt{5})^2$;
2. $(2+\sqrt{5})^2$;
3. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$;
4. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$;
5. $(3+\sqrt{7})^2 - (3-\sqrt{7})^2$;
6. $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$;
7. $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$;
8. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$.

Leçon 7 : Exponentielle et logarithme

7.1 Propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction, notée exp, qui vérifie $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Si x est un réel, le nombre $\exp(x)$ peut aussi être noté e^x. On a les formules suivantes, à connaître parfaitement, où a, b sont des réels.

1. $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$; **2.** $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$; **3.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$; **4.** $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a\times b}$.

On rappelle par ailleurs que pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. La dernière propriété fournit alors $\sqrt{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$.

La **fonction logarithme népérien** est l'unique fonction, notée ln, qui vérifie :

1. pour tout $x > 0$ $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$; **2.** pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

On a donc en particulier $\ln(1) = 0$. On a de plus les propriétés suivantes, qui sont aussi à connaître parfaitement, où a et b sont des réels strictement positifs.

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$; **2.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;

3. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$; **4.** $\ln(a^b) = b\ln(a)$.

La dernière propriété fournit en particulier $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

Exercice 49. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ les quantités suivantes.

1. $\ln(\sqrt{2})$. **2.** $\ln 8$. **3.** $\ln\left(2\mathrm{e}^2\right)$. **4.** $\ln 6 - \ln 3$.

Exercice 50. Soit x un réel tel que les expressions suivantes soient bien définies. Simplifier le plus possible.

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^x)^2}$; **2.** $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}$;

3. $\dfrac{\ln(2x)}{\ln x}$; **4.** $\mathrm{e}^{2\ln x}$;

5. $\ln(2x) - \ln x$; **6.** $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

7. $\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; **8.** $\ln\left(\mathrm{e}^2\sqrt{\mathrm{e}}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$;

9. $\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^5\right)}{\ln\left(\mathrm{e}^3\right)}$; **10.** $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}} \cdot \mathrm{e}^{-x}$;

11. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln(x^2)$; **12.** $\ln(x^3 - x^2) - \ln(x-1)$.

Exercice 51. **1.** Écrire $A = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{5x+3}}}{\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-3x+1}}$ sous la forme $A = \mathrm{e}^{y}$ avec $y \in \mathbf{R}$.

2. Écrire $B = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2 \times 24}{\mathrm{e}^3} \times \mathrm{e}^2\right)$ sous la forme $B = m + n\ln 2 + p\ln 3$ avec $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbf{Z}$.

7.2 Résolution d'équations avec $\exp$

Pour résoudre une équation avec exp, on utilise la propriété suivante : pour tous réels a et b,

$$\begin{array}{rrcl} & \exp(a) & = & \exp(b) \\ \text{si et seulement si} & a & = & b. \end{array}$$

Par exemple, résolvons $\mathrm{e}^{2x+1} - 3 = 0$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x+1} - 3 &= 0 \\
\mathrm{e}^{3x+1} &= 3 \\
\mathrm{e}^{2x+1} &= \mathrm{e}^{\ln(3)} && \text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)} \\
2x + 1 &= \ln(3) && \text{(on est ramené à une équation du premier degré)} \\
2x &= \ln(3) - 1 \\
x &= \frac{\ln(3) - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\dfrac{\ln(3) - 1}{2}\right\}$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite pour passer de $\mathrm{e}^{2x+1} = 3$ à $2x + 1 = \ln(3)$ en composant directement par la fonction ln, puisque $\ln(\mathrm{e}^{2x+1}) = 2x + 1$.

Il faut aussi retenir que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, ce qui signifie que pour tout $A(x)$ réel, $\mathrm{e}^{A(x)} > 0$. Par exemple, l'équation

$$\mathrm{e}^{4x+1} = -1$$

n'admet pas de solution car pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{4x+1} > 0$ (et donc e^{4x+1} ne peut jamais être égal à un nombre négatif !).

Exercice 52. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-2}$; **2.** $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}$; **3.** $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^{3}$; **4.** $\mathrm{e}^{2x+1} = 2$;

5. $\mathrm{e}^{x} = 1$; **6.** $\mathrm{e}^{x} + 4 = 0$; **7.** $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}$; **8.** $\mathrm{e}^{x^2+1} = 1$;

Exercice 53. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $(\mathrm{e}^{x} - 3)(\mathrm{e}^{x} + 3) = 0$; **2.** $(3x + 1)\mathrm{e}^{x} = 0$; **3.** $(2x - 1)\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}$;

4. $x\mathrm{e}^{x+3} = 2\mathrm{e}^{x+3}$; **5.** $-\mathrm{e}^{x^2+3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+3}}$; **6.** $\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{x} = 0$;

7. $\mathrm{e}^{6x} - 4\mathrm{e}^{3x} + 4 = 0$; **8.** $9\mathrm{e}^{-2x} - 6 + \mathrm{e}^{2x} = 0$; **9.** $\mathrm{e}^{x} - 3 + 2\mathrm{e}^{-x} = 0$.

7.3 Résolution d'équations avec $\ln$

Pour résoudre une équation avec ln, on utilise la propriété suivante : pour tous réels a et b **strictement positifs**,

$$\begin{array}{rrcl} & \ln(a) & = & \ln(b) \\ \text{si et seulement si} & a & = & b. \end{array}$$

Par exemple, résolvons $\ln(2x+1)-3=0$. Attention, ici on ne peut pas travailler avec n'importe quel réel. L'expression $\ln(2x+1)$ existe si et seulement si $2x+1>0$, c'est-à-dire $x>-\dfrac{1}{2}$. On se fixe donc un réel x dans $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ pour la suite. On dit que $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est l'**ensemble (ou domaine) de définition** de l'équation. Quand on résout une équation, on commence toujours par chercher l'ensemble de définition (et il faut que les solutions qu'on obtient par le calcul appartiennent effectivement à cet ensemble pour être des « vraies » solutions).

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1)-3&=0\\
\ln(2x+1)&=3\\
\ln(2x+1)&=\ln(\mathrm{e}^3) &&\text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)}\\
2x+1&=\mathrm{e}^3 &&\text{(on est ramené à une équation du premier degré)}\\
2x&=\mathrm{e}^3-1\\
x&=\frac{\mathrm{e}^3-1}{2}.
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{2}>\dfrac{1}{2}$ (vous pouvez utiliser la calculatrice pour le moment pour ce type de vérification ; notons qu'on peut faire aussi sans, puisque $\mathrm{e}\approx 2,71$ est une valeur à connaître, d'où $\mathrm{e}^3\geq 2$ puis $\mathrm{e}^3-1\geq 1$ et ainsi $\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{2}>\dfrac{1}{2}$; on reviendra sur l'obtention de telles inégalités dans une leçon ultérieure). Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{2}\right\}$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite pour passer de $\ln(2x+1)=3$ à $2x+1=\mathrm{e}^3$ en composant directement par la fonction exp, puisque $\exp(\ln(2x+1))=2x+1$.

Exercice 54. Déterminer le domaine de définition des équations suivantes, puis les résoudre.

1. $\ln(1+3x)=\ln(x+1)$;

2. $\ln(2x+1)=\ln(x^2-1)$;

3. $\ln(x-3)-1=0$;

4. $\ln(x)+\ln(x-1)=0$;

5. $\ln(4-x)=0$;

6. $\ln(x)-\ln(1-x)=\ln(2)$;

7. $\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$;

8. $\ln(x-1)+\ln(2-x)=\ln(6x)$;

9. $\ln(x-2)+\ln(x)=\ln(3)$;

10. $\ln(x(x-2))=\ln(3)$;

11. $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$;

12. $2\ln(x)^2+3\ln(x)-2=0$.

Vous pouvez utiliser que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leq 1$ (on expliquera dans une leçon ultérieure comment obtenir ces inégalités).

7.4 Résolution d'inéquations avec exp

Pour résoudre une inéquation avec exp, on utilise une des propriétés suivantes : pour tous réels a et b,

$$\exp(a)\leq\exp(b) \text{ si et seulement si } a\leq b$$

et

$$\exp(a)<\exp(b) \text{ si et seulement si } a<b$$

(notons qu'on peut remplacer $\leq$ par $\geq$ et $<$ par $>$, ce qui revient à échanger a et b).

Par exemple, résolvons $\mathrm{e}^{2x+1} - 3 \leq 0$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x+1} - 3 &\leq 0 \\
\mathrm{e}^{2x+1} &\leq 3 \\
\mathrm{e}^{2x+1} &\leq \mathrm{e}^{\ln(3)} && \text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)} \\
2x + 1 &\leq \ln(3) && \text{(on est ramené à une équation du premier degré)} \\
2x &\leq \ln(3) - 1 \\
x &\leq \frac{\ln(3) - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty\,; \frac{\ln(3)-1}{2}\right]$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite en composant directement par la fonction logarithme népérien :

$$\mathrm{e}^{2x+1} \leq 3 \Longleftrightarrow 2x + 1 \leq \ln(3).$$

On rappelle aussi que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives. Cela entraîne par exemple que l'inéquation

$$\mathrm{e}^{x+2} \leq -1$$

n'admet pas de solution (l'ensemble des solutions est $\emptyset$). De plus,

$$\mathrm{e}^{x+2} \geq -1$$

admet tous les réels comme solution (l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}$), puisque pour n'importe quel x réel, on a $\mathrm{e}^{x+2} > 0$, donc en particulier $\mathrm{e}^{x+2} \geq -1$.

Exercice 55. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $\mathrm{e}^{2x} > \mathrm{e}^{-2}$; **2.** $\mathrm{e}^{-3x} < \mathrm{e}$; **3.** $\mathrm{e}^{x} \leq -1$; **4.** $\mathrm{e}^{x} \geq -1$;

5. $\mathrm{e}^{3x-5} \geq 3$; **6.** $\mathrm{e}^{3x-5} \geq -3$; **7.** $\mathrm{e}^{-2x-1} \leq 1$; **8.** $\mathrm{e}^{x^2+1} < -4$.

Exercice 56. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\mathrm{e}^{x+1} < 1$; **2.** $-3\mathrm{e}^{x^2-4} > 4$;

3. $\mathrm{e}^{-2x+5} \geq 0$; **4.** $\mathrm{e}^{x+4} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}$;

5. $(x-1)\mathrm{e}^{x} > 0$; **6.** $(-2x+3)\mathrm{e}^{x} < 0$;

7. $x^2\mathrm{e}^{-2x+5} \geq 0$; **8.** $\dfrac{x-4}{\mathrm{e}^{x}} \leq 0$;

9. $\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 12 > 0$; **10.** $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 > 0$.

7.5 Résolution d'inéquations avec ln

Pour résoudre une inéquation avec ln, on utilise une des propriétés suivantes : pour tous réels a et b **strictement positifs**,

$$\ln(a) \leq \ln(b) \text{ si et seulement si } a \leq b$$

et

$$\ln(a) < \ln(b) \text{ si et seulement si } a < b$$

(notons qu'on peut remplacer $\leq$ par $\geq$ et $<$ par $>$, ce qui revient à échanger a et b).

Par exemple, résolvons $\ln(2x+1) - 3 \leq 0$. Attention, ici on ne peut pas travailler avec n'importe quel réel. L'expression $\ln(2x+1)$ existe si et seulement si $2x+1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{2}$. On se fixe donc un réel x dans $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ pour la suite.

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1) - 3 &\leq 0 \\
\ln(2x+1) &\leq 3 \\
\ln(2x+1) &\leq \ln(\mathrm{e}^3) && \text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)} \\
2x+1 &\leq \mathrm{e}^3 && \text{(on est ramené à une équation du premier degré)} \\
2x &\leq \mathrm{e}^3 - 1 \\
x &\leq \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Or on rappelle qu'au départ on a choisi $x > -\dfrac{1}{2}$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{2}\right]$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite en composant directement par la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1) &\leq 3 \\
2x+1 &\leq \mathrm{e}^3.
\end{aligned}$$

Exercice 57. Déterminer le domaine de définition des inéquations suivantes, puis les résoudre.

1. $\ln(x) \leq 3$;

2. $\ln(x) > \mathrm{e}$;

3. $\ln(2x-1) > -1$;

4. $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) \geq \ln 3$;

5. $\ln(x) \leq \ln(x^2 - 2x)$;

6. $\ln(x+2) \geq 0$;

7. $\ln(x-1) < 0$;

8. $2\ln(x+1) \leq 0$;

9. $2\ln(x) + 1 \geq 0$;

10. $\ln(x+4) \geq 0$;

11. $\ln(x)(2 - \ln(x)) \geq 0$;

12. $\ln(x)^2 + 4\ln(x) + 4 \geq 0$.

La fonction logarithme népérien peut aider aussi pour déterminer un entier n tel qu'une suite géométrique dépasse un certain seuil, c'est-à-dire à résoudre des inéquations du type

$$q^n \geq a \quad \text{ou} \quad q^n \leq a$$

(ou encore ces mêmes inéquations en remplaçant $\leq$ par $<$, $\geq$ par $>$). Pour résoudre ce type d'inéquation, il faut commencer par composer par ln et se rappeler que $\ln(q^n) = n\ln(q)$.

Par exemple, déterminons le plus petit entier n tel que $2^n > 50$. On a

$$\begin{aligned}
2^n &> 50 \\
\ln(2^n) &> \ln(50) \\
n\ln(2) &> \ln(50) \\
n &> \frac{\ln(50)}{\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Donc le plus petit n tel que $2^n > 50$ est le premier entier supérieur au réel $\dfrac{\ln(50)}{\ln(2)}$.

Exercice 58. Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier n qui vérifie l'inégalité proposée.

1. $3^n > 125$;

2. $5^n \geq 10\ 000$;

3. $0,5^n < 0,01$;

4. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-4}$;

5. $2^{n-6} > 100$;

6. $0,8^n \leq 0,05$;

7. $1 - 0,3^n > 0,95$;

8. $\dfrac{4^n}{5^{n-1}} < 1$.

7.6 Révision des leçons précédentes

Exercice 59. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 2^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

1. $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$;

2. $2^{21} + 2^{22}$;

3. $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$;

4. $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$.

Leçon 8 : Dérivation

8.1 Dérivation d'une fonction

Le tableau qui suit donne les dérivées usuelles, à connaître par cœur !! Les notations suivantes sont utilisées : c est une constante réelle, n est un entier naturel non nul et m est un entier négatif.

Expression de f	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Expression de f'
c	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	0
x^n	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	nx^{n-1}
x^m	$\mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}^\star$	mx^{m-1}
e^x	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$\mathbf{R}_+^\star$	$\dfrac{1}{x}$

On dispose également des formules suivantes, valables pour u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et où λ, a, b sont des réels quelconques.

Expression de f	Expression de f'	Condition
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	
$\lambda u(x)$	$\lambda u'(x)$	
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	
$\dfrac{u(x)}{(v(x))}$	$\dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$	v ne s'annule pas sur I
$\dfrac{1}{(u(x))}$	$\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$	u ne s'annule pas sur I
$(u(x))^n$	$nu'(x)(u(x))^{n-1}$	
$(u(x))^m$	$mu'(x)(u(x))^{m-1}$	u ne s'annule pas sur I
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u > 0$ sur I
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	
$u(ax + b)$	$au'(ax + b)$	pour tout x vérifiant $ax + b \in I$

Exercice 60. Dériver les fonctions f définies par :

1. $f(x) = x\ln(x)$ **2.** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ **3.** $f(x) = \ln(x^2+1)$

4. $f(x) = e^{x^2+x+1}$ **5.** $f(x) = (2x-1)^2$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x^2+1}$

7. $f(x) = \ln(e^x+1)$ **8.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **9.** $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

10. $f(x) = (e^{2x}+1)^8$ **11.** $f(x) = (x+2)\ln(x^4+1)$ **12.** $f(x) = (3e^{5x}+1)^7$

13. $f(x) = \dfrac{1}{2x+5} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$. **14.** $f(x) = (1+\ln(x))^3$ **15.** $f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$

Exercice 61. Dans cet exercice a désigne un réel fixé. Dériver les fonctions f définies par :

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ **2.** $f(x) = \ln(3+e^{ax})$ **3.** $f(x) = (ax+1)^7$

4. $f(x) = \dfrac{x-a}{x+a}$ **5.** $f(x) = \dfrac{2}{(ax+1)^5}$ **6.** $f(x) = x^3+2ax^2-1$

7. $f(x) = \ln(\ln(ax))$ **8.** $f(x) = e^{ax^2}$ **9.** $f(x) = (e^{ax}+1)^5$

Exercice 62. On note a un réel fixé. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ et vérifiant pour tout réel $x, f'(x) = af(x)$.

1. Soit K un réel fixé. Montrer que la fonction f_K définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = Ke^{ax}$ appartient à $\mathcal{F}$.

2. Soit g une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que la fonction $t : x \mapsto \dfrac{g(x)}{e^{ax}}$ est dérivable, de dérivée nulle. En déduire qu'il existe une constante K réelle telle que pour tout réel $x, g(x) = Ke^{ax}$.

3. En déduire l'ensemble des fonctions composant $\mathcal{F}$.

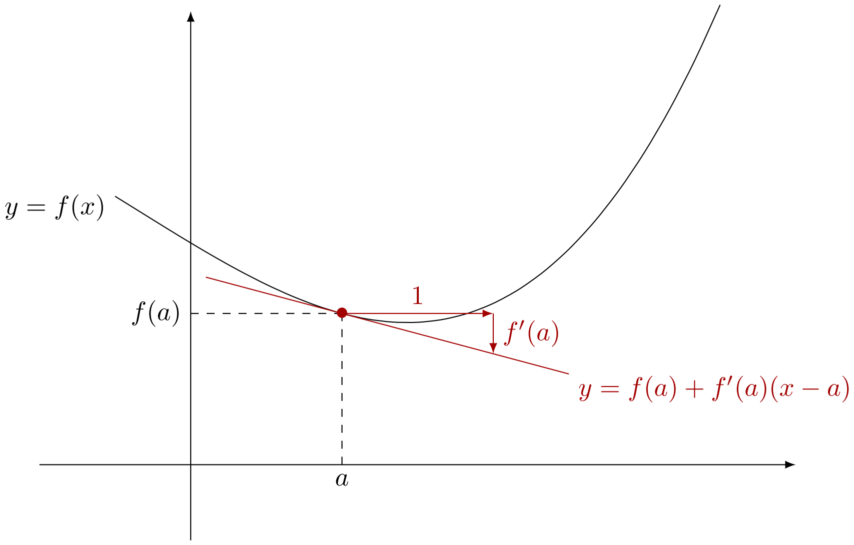
Exercice 63. Dériver les fonctions f définies par :

1. $f(x) = (x^3-1)^4$ **2.** $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x}$ **3.** $f(x) = (x^2+1)e^{-x^2}$

4. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ **5.** $f(x) = e^{x\ln(x)}$ **6.** $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

8.2 Tangente à un graphe

Du point de vue géométrique, si f est dérivable en a, le nombre $f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.
Plus généralement, l'équation réduite de cette tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.



Par exemple, déterminons l'équation réduite de la tangente au graphe $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$ en -2. On a $f(-2) = 3$ et pour tout x réel, $f'(x) = 6x + 5$ donc $f'(-2) = -7$. Ainsi, la tangente a pour équation réduite $y = -7(x - (-2)) + 3$ c'est à dire $y = -7x + 17$

Exercice 64. Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'équation réduite de la tangente en a pour la fonction f.

1. $f; x \mapsto x^3 - 3x + 1$, $a = 0$.

2. $f; x \mapsto \dfrac{x^2}{3x - 9}$, $a = 1$.

3. $f; x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $a = 2$.

4. $f; x \mapsto x + 2 + \dfrac{4}{x - 2}$, $a = -2$.

Exercice 65. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax^2 + 2x + b$ où a et b sont deux réels. Déterminer les valeurs de a et b telles que le graphe de f admette au point $A(1; -1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation réduite $y = -4x$.

Exercice 66. Déterminer l'équation réduite de la tangente en 0 pour la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.

Exercice 67. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\mathcal{T}_a$ la tangente à son graphe au point M d'abscisse $a > 0$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_a$ coupe l'axe des abscisses. On notera A ce point et B le point d'intersection de $\mathcal{T}_a$ avec l'axe des ordonnées.
2. Montrer que M est le milieu de $[AB]$.

Exercice 68. Soient a un nombre réel non nul, x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$, f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax^2$. Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x_1 + x_2$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2.

8.3 Révision des leçons précédentes

Exercice 69. Soit a et b deux nombres réels, avec b non nul. Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \dfrac{4}{7} + \left(\dfrac{13}{28} - \dfrac{5}{14}\right)$;

2. $B = 2 - \left(\dfrac{7}{15} - \dfrac{3}{10}\right)$;

3. $C = \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)$;

4. $D = \frac{7a}{5} - \frac{2a}{5}$;

5. $E = a - \frac{a}{5}$;

6. $F = 2 + \frac{a}{b} - \frac{a}{3b}$.

Leçon 9 : Variations d'une fonction

9.1 Étude des variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I (on rappelle qu'un intervalle est un ensemble de la forme $]a\,;\,b[$, $]a\,;\,b]$, $[a\,;\,b[$ ou $[a\,;\,b]$, avec $a \leq b$ des réels ou éventuellement $-\infty$, $+\infty$), on utilise le résultat suivant :

- Si $f' \geq 0$, alors la fonction est croissante.
- Si $f' \leq 0$, alors la fonction est décroissante.
- Si $f' > 0$, alors la fonction est strictement croissante.
- Si $f' < 0$, alors la fonction est strictement décroissante.

L'étude des variations se fait donc toujours en trois temps :

1. On détermine l'expression de la dérivée de f.
2. On détermine le signe de $f'(x)$ en fonction de x (souvent dans un tableau de signes).
3. On donne les variations de la fonction (le tableau de variations est souvent inscrit immédiatement après le tableau de signe déterminé à l'étape précédente).

Par exemple, déterminons les variations de la fonction $f : x \longmapsto -x^3 + x^2 + x$, définie sur $\mathbf{R}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Ainsi, f' est une fonction polynomiale de degré 2, dont le discriminant vaut $2^2 - 4 \cdot (-3) = 16$, ce qui entraîne que ses racines sont $\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2 \cdot (-3)} = 1$ et $\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2 \cdot (-3)} = -\dfrac{1}{3}$. Or, le signe d'un trinôme est celui de son coefficient dominant sauf entre ses racines, d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Notons que si on veut un tableau de variation complet, il faut aussi indiquer les différentes « valeurs au bout des flèches ». Par exemple ici, il faut calculer $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{5}{27}$ et $f(1) = 1$. Il faut aussi déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Il y a des formes indéterminées, qu'on lève en factorisation par le monôme de plus haut degré : pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3\left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right).$$

Sous cette forme, on obtient rapidement que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. On a alors :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Si vous n'êtes pas à l'aise avec le calcul des limites, vous pouvez laisser ce problème de côté pour le moment, nous y reviendrons plus tard.

Exercice 70. Déterminer les variations des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto -x^2 + 4x + 5$ définie sur $\mathbf{R}$.
2. $f : x \longmapsto -x^3 + 3x$ définie sur $\mathbf{R}$.
3. $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur $\mathbf{R}$.
4. $f : x \longmapsto x^4 + 8x^2 + 8$ définie sur $\mathbf{R}$.
5. $f : x \longmapsto \dfrac{x+2}{x-1}$ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.
6. $f : x \longmapsto \dfrac{-4x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbf{R}$.
7. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.
8. $f : x \longmapsto x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Exercice 71. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$.
Étudier les variations de f sur $\mathbf{R}$.

Exercice 72. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}$.
Étudier les variations de f.

Exercice 73. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par l'expression

$$f(x) = \left(5x^2 + 5x - 4\right)\sqrt{x}.$$

1. Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{25x^2 + 15x - 4}{2\sqrt{x}}.$$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 74. Étudier les variations de $f : x \longmapsto (x+1)\ln(x)$ sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 75. Étudier les variations de $f : x \longmapsto 2\ln(x) - 5x$ sur $]0\,;+\infty[$.

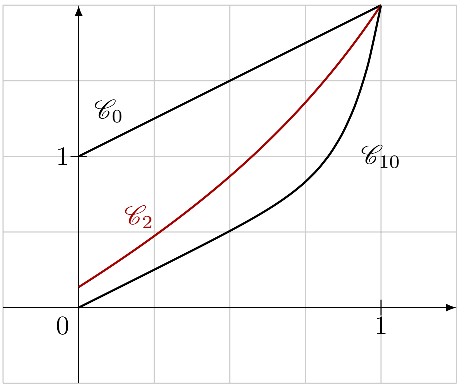
Exercice 76.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est strictement positive.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est strictement croissante.
3. Montrer qu'il existe un point A du plan qui appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ (où n peut être n'importe quel entier naturel).



9.2 Révision des leçons précédentes

Exercice 77. Étudier le signe des expressions suivantes sur $\mathbf{R}$.

1. $5\mathrm{e}^x - 5$;
2. $(3x-1)\mathrm{e}^x$;
3. $(-8x+4)(3x-1)\mathrm{e}^{x-2}$;
4. $\dfrac{6x-5}{\mathrm{e}^{3x-1}}$.

Leçon 10 : Établir une inégalité

10.1 Règles de calcul sur les inégalités

On rappelle les principales règles de calcul avec les inégalités. Soit a, b et c trois réels.

1. On peut ajouter ou retrancher un terme dans une inégalité. Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$.

2. On peut multiplier une inégalité par un nombre positif sans changer le sens de l'inégalité. Si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ab \leq bc$.

3. On peut multiplier une inégalité par un nombre positif en changeant le sens de l'inégalité. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $ab \geq bc$.

4. On peut passer à l'inverse pour des nombres **non nuls et de même signes**, en changeant le sens de l'inégalité.

- Si $0 < a \leq b$, alors $0 < \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.
- Si $a \leq b < 0$, alors $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a} < 0$.

5. Plus généralement, on peut composer par une fonction croissante sans changer le sens de l'inégalité : si f est une fonction croissante définie sur un intervalle I, si a et b sont éléments de I avec $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$.

6. Si on compose par une fonction décroissante, on change le sens de l'inégalité : si f est une fonction décroissante définie sur un intervalle I, si a et b sont éléments de I avec $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

Notons qu'à partir de ces deux derniers points, on peut retrouver les premiers. Par exemple, dans **1.** on applique les fonctions $f : x \longmapsto c + x$ et $f : x \longmapsto x - c$, qui sont croissantes. Pour **2.** et **3.**, on applique la fonction $f : x \longmapsto cx$, qui est croissante lorsque $c \geq 0$ et décroissante quand $x \leq 0$. Enfin, la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbf{R}_+^\star$ et sur $\mathbf{R}_-^\star$, on retrouve le point **4.**

On rappelle que les fonctions ln, exp, $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont croissantes sur leur ensemble de définition. Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est toujours croissante sur $\mathbf{R}_+$. Sur $\mathbf{R}_-$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est croissante si n est impair, elle est décroissante si n est pair.

Montrons comment appliquer les propriétés précédentes, et cherchons à encadrer $\sqrt{-\dfrac{x}{2} - 3}$ lorsque $x \in [-7\,;\,-6]$. On a :

$$
\begin{aligned}
& -7 \leq x \leq -6 & \\
\text{donc } & -\frac{1}{2} \cdot (-7) \geq -\frac{1}{2} \cdot x \geq -\frac{1}{2} \cdot (-6) & \text{on multiplie par } -\frac{1}{2} \leq 0\text{, voir propriété } \mathbf{3.} \\
\text{donc } & \frac{7}{2} \geq -\frac{x}{2} \geq 3 & \text{on simplifie} \\
\text{donc } & \frac{7}{2} - 3 \geq -\frac{x}{2} - 3 \geq 3 - 3 & \text{on ajoute -3, voir propriété } \mathbf{1.} \\
\text{donc } & \frac{1}{2} \geq -\frac{x}{2} - 3 \geq 0 & \text{on simplifie} \\
\text{donc } & \sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{-\frac{x}{2} - 3} \geq \sqrt{0} & \text{on applique la fonction racine carrée, croissante, voir } \mathbf{5.} \\
\text{donc } & \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt{-\frac{x}{2} - 3} \geq 0 & \text{on simplifie.}
\end{aligned}
$$

L'idée a consisté à partir de ce que l'on savait, à savoir $x \in [-7\,;\,-6]$, puis de chercher à reconstituer l'expression que l'on demandait d'encadrer.

Exercice 78. Soit $x \in [2\,;\,3]$. Déterminer un encadrement des nombres suivantes.

1. $A(x) = 7x + 3$;
2. $B(x) = -x + 1$;
3. $C(x) = \dfrac{1}{7x-3}$;
4. $D(x) = \exp\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$;
5. $E(x) = \ln(-(-x+1)^3)$;
6. $F(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{2}}\right)^3$.

Exercice 79. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $f(x) = 2 + \ln(x)$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
2. Montrer que, pour tout $x \in [3\,;\,4]$, $-\dfrac{1}{3} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{3}$.

10.2 Encadrer des racines carrées

Pour encadrer une racine carrée $\sqrt{a}$ (où $a \geq 0$), on procède en deux étapes.

1. On encadre a entre les deux carrés parfaits les plus proches n^2 et m^2 (où n et m sont des entiers naturels) : $n^2 \leq a \leq m^2$.
2. On compose par la fonction racine carrée, croissante : $n \leq \sqrt{a} \leq m$.

Par exemple, encadrons $\sqrt{73}$ entre deux entiers consécutifs.

$$\begin{aligned}
& 64 \leq 73 \leq 81 & \\
\text{donc } & \sqrt{64} \leq \sqrt{73} \leq \sqrt{81} & \text{on compose par la fonction racine carrée, croissante} \\
\text{donc } & 8 \leq \sqrt{73} \leq 9 & \text{on simplifie.}
\end{aligned}$$

Exercice 80.
1. Justifier que $5 \leq \sqrt{29} \leq 6$.
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 - x - 7 = 0$ et donner un encadrement des solutions.

Exercice 81. Déterminer l'unique solution de l'équation

$$\frac{1}{5}(3 + x^2) = x$$

sur $[0\,;\,1]$.

10.3 Établir une inégalité avec les variations d'une fonction

Ici, on utilise les propriétés **5.** et **6.** présentées dans le paragraphe précédent.

Exercice 82. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Justifier que si $x \leq -1$, alors $f(x) \leq -1$.

Exercice 83. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2. Donner le tableau de variations de f.
3. Justifier que si $x \geq -1$, alors $f(x) \geq -1$.

Exercice 84. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x).$$

1. Donner les variations de f.
2. Montrer que si $x \in [1\,;\,2]$, alors $f(x) \in [1\,;\,2]$.

10.4 Se ramener à une étude de signe

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. On suppose qu'on demande d'obtenir, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq g(x).$$

Pour cela, on peut plutôt chercher à montrer l'inégalité équivalente

$$g(x) - f(x) \geq 0.$$

L'intérêt est qu'on dispose de beaucoup d'outils pour obtenir le signe d'une expression, comme le tableau de signes par exemple. On peut aussi étudier les variations de la fonction $h : x \longmapsto g(x) - f(x)$.

Exercice 85. Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exercice 86. **1.** **(a)** Étudier les variations de la fonction $h : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ sur $\mathbf{R}$.
(b) En déduire le signe de $h(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
(c) Justifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geq x + 1$.
2. En vous inspirant de la question précédente, montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 87. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer le signe de f.
4. Montrer que, pour tout $x < 1$,

$$1 - x \geq \exp\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

10.5 Obtenir le signe de la dérivée

Dans certains exercices, le signe de la dérivée f' n'est pas aisé à obtenir directement. On étudie alors séparément le signe de f' pour en déduire les variations de f. On donne quelques exercices illustrant cette méthode ci-après.

Exercice 88. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln(x)}{x},$$

ainsi que la fonction φ définie sur $]0\,;\,+\infty[$

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln(x).$$

1. **(a)** Calculer $\varphi(1)$.
   (b) Étudier les variations de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.
2. Montrer que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
3. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 89. On considère, pour entier naturel non nul n, la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f_n', dérivée de f_n. *Remarque :* vous pourrez noter f_n'' la dérivée de f_n'.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. En déduire que $x \longmapsto f_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

10.6 Révision des leçons précédentes

Exercice 90. On considère la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Déterminer le tableau de variations complet de h.

Exercices d'entraînement supplémentaires

11.1 Fractions

Exercice 91. Soit a et b deux nombres réels positifs non nuls. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $A = \dfrac{2}{\frac{2}{3}+2}$;
2. $B = \dfrac{a+\frac{1}{a}}{a}$;
3. $C = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$;
4. $D = \dfrac{1}{a(a+b)} + \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a}$.

Exercice 92. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

1. $A = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$;
2. $B = \dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{16}$;
3. $C = \dfrac{\dfrac{7}{15}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{12}{5}}$;
4. $D = \dfrac{\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{8}\times\dfrac{1}{12}}{2-\dfrac{4}{3}}$.

Exercice 93. Simplifier les fractions suivantes. La lettre k désigne un entier naturel non nul.

1. $A = \dfrac{32}{40}$;
2. $B = 8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$;
3. $C = \dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}$;
4. $D = \dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$.

Exercice 94. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

1. $A = (2\times 3\times 5\times 7)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)$;
2. $B = \left(\dfrac{136}{15}-\dfrac{28}{5}+\dfrac{62}{10}\right)\times\dfrac{21}{24}$;
3. $C = \dfrac{5^{10}\times 7^3 - 25^5\times 49^2}{(125\times 7)^3 + 5^9\times 14^3}$;
4. $D = \dfrac{1\ 978\times 1\ 979 + 1\ 980\times 21 + 1\ 958}{1\ 980\times 1\ 979 - 1\ 978\times 1\ 979}$.

Exercice 95. Écrire $A = \dfrac{0{,}5-\dfrac{3}{17}+\dfrac{3}{37}}{\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{17}+\dfrac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-0{,}2}{\dfrac{7}{5}-\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{3}-3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 96. En utilisant les entités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

1. $A = \dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)\times 2\ 023}$;
2. $B = \dfrac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$;
3. $C = \dfrac{1\ 235\times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234\times 2\ 469 + 1\ 235}$;
4. $D = \dfrac{4\ 002}{1\ 000\times 1\ 002 - 999\times 1\ 001}$.

Exercice 97. Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

1. $A = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}^\star$.

2. $B = \dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$, pour a, b et c trois entiers distincts deux à deux. On pourra utiliser

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

3. $C = \dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbf{N}^\star \setminus \{1, 2\}$.

Exercice 98. Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

1. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$;

2. $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$;

3. $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$;

4. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$.

Exercice 99. En utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$, simplifier pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$A_n = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n^2}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$$

Exercice 100. On vend successivement $\dfrac{1}{3}$, puis $\dfrac{2}{9}$ puis $\dfrac{1}{5}$ de la contenance en litre d'une barrique de vin. Le reste est vendu 1,5 € le litre ; le prix de vente de ce reste est 66 €. Quelle est la contenance de la barrique.

Exercice 101. Trois personnes héritent d'une certaine somme d'argent. La première personne touche trois onzième du total. Les autres se partagent le reste de l'héritage, à savoir 32 000 €. Le deuxième héritier dépense deux septième de sa part et le troisième quatre neuvième de la sienne ; il reste alors à ces deux dernières personnes des sommes égales. Quel est le montant de l'héritage et quelle est la part de chacun des trois héritiers (en euros).

Exercice 102. Une montre retarde d'un quart de minute pendant le jour mais par suite du changement de température, elle avance d'un tiers de minute pendant la nuit. On la règle aujourd'hui à midi ; dans combien de jours aura-t-elle une avance de deux minutes ? On admettra que le jour et la nuit ont chacun une durée de douze heures.

11.2 Puissances

Exercice 103. Dans chaque cas, simplifier au maximum.

1. $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$;

2. $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$;

3. $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$;

4. $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$.

Exercice 104. Soit n un entier et a, b deux réels non nuls. Trouver une écriture plus simples des nombres suivantes.

1. $A = \dfrac{(ab)^2 b}{a^{3-n}}$;

2. $B = \dfrac{2a^3 + 6(ab)^2}{(2a)^2 b}$.

Exercice 105. Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x appartenant à l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x+3)^3 = ? \times (x+?)^3$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x+3)^3 = ? \times (1+? \times x)^3$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $(2x+3)^4 = x^? \times \left(2 + \dfrac{3}{x}\right)^4$.

11.3 Racines carrées

Exercice 106. Simplifier les expressions suivantes (on pourra commencer par les élever au carré) :

1. $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$;
2. $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Exercice 107. Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Exercice 108. Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

1. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$;
2. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;
3. $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$;
4. $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$;
5. $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$;
6. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

Exercice 109. On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

1. $f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$;
2. $\dfrac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$;
3. $\sqrt{x + 2f(x)}$;
4. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$;
5. $f(x) + 4f''(x)$;
6. $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$.

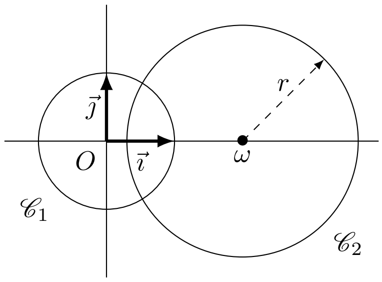
11.4 Développement et factorisation

Exercice 110. Soit n un entier naturel. On pose $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1. Factoriser $n(n+3)+2$.
2. On pose $q = (n+1)(n+2)$. Exprimer p en fonction de q ; la lettre n ne doit plus apparaître.
3. Montrer que $p+1$ est le carré d'un entier naturel.

Exercice 111. Montrer que pour tous entiers relatifs a, b et c, le triplet $(c(a^2-b^2), 2abc, c(a^2+b^2))$ est une solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$ d'inconnue (x,y,z).

Exercice 112.



Soit d un réel strictement positif et r un réel supérieur ou égal à 1. On travaille dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O et de rayon 1 et le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre le point ω de coordonnées $(d, 0)$ et de rayon r. Une étude géométrique assure que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ et $(x-d)^2 + y^2 = r^2$. Or pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ (x-d)^2 + y^2 &= r^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2dx &= d^2 - r^2 + 1 \\ 4d^2y^2 &= 4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 \end{cases}$$

Finalement, les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement si $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 \geq 0$.

1. Factoriser l'expression $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2$.

2. Montrer que les cercles considérés ont au moins un point d'intersection si et seulement si

$$r - 1 \leq d \leq r + 1.$$

Exercice 113. Soit x et y deux réels. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A_1 = x^4 + 18x^2 + 81$.

2. $A_2 = (2x-3)^2 - (x+7)^2$.

3. $A_3 = x^2 + 1 - (x-1)(2x+3) - 2x$.

4. $A_4 = (4x^2 - 25)(x+2) - (x^2 - 4)(2x+5) + (5x+10)(2x+5)$.

Exercice 114. Soit a, b, c, x et y cinq réels tels que les expressions suivantes soient bien définies (autrement dit, tels qu'il n'y ait pas de division par zéro). Simplifier les expressions suivantes.

1. $\dfrac{25x^5y^3}{15x^3y}$; **2.** $\dfrac{64a^4b^2c^3}{48a^2b^3c}$; **3.** $\dfrac{b-ab}{a-a^2}$;

4. $\dfrac{a^2x^3y - ay^2 + a^2xy}{ax^2y}$; **5.** $\dfrac{bx-by}{ax-ay}$; **6.** $\dfrac{2a+2b+2c}{5a+5b+5c}$;

7. $\dfrac{3x^2-6x}{2x^2-8}$; **8.** $\dfrac{2x-6}{x^2-9}$; **9.** $\dfrac{8x-6x^2}{4x^2+10x}$;

10. $\dfrac{9x+3}{9x^2+6x+1}$; **11.** $\dfrac{16x^2-24x+9}{16x^2-9}$; **12.** $\dfrac{16x^2+24x+9}{12x+9}$;

13. $\dfrac{2x+5}{4x^2+20x+25}$; **14.** $\dfrac{(x+7)^2-x-7}{x+6}$; **15.** $\dfrac{(5x-3)^2-4(2-x)^2}{14x-14}$;

16. $\dfrac{(3x-12)\left(1-x^2\right)}{(2x-8)(x+1)^2}$; **17.** $\dfrac{(x+3)^2-(5x-4)^2}{36x^2-1}$; **18.** $\dfrac{9+12x+4x^2}{2x+3}$;

19. $\dfrac{4x^2-1-2(2x-1)^2}{2x-1}$; **20.** $\dfrac{x^2-10x+9}{(x-1)^2-(1-x)(3-2x)}$.

Exercice 115. Soit n un entier naturel. On pose $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1. Factoriser $n(n+3)+2$.

2. On pose $q = (n+1)(n+2)$. Exprimer p en fonction de q (la lettre n ne doit plus apparaître).

3. Montrer que $p+1$ est le carré d'un entier naturel.

11.5 Résolution d'équations

Exercice 116. Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\ln\left(x^2-3\right) = -8$.

2. $e^{2x} - e^{x^2} = 0$.

3. $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(2) + 2\ln(3)$.

4. $\ln(\ln x) > 0$.

Exercice 117. On cherche à résoudre l'équation

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$$

d'inconnue x réelle.

1. Soit $x \neq 0$. Justifier que

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 \iff x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Soit $x \neq 0$. On pose $u = x + \dfrac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x.

3. Résoudre l'équation $x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$, d'inconnue x réelle.

11.6 Exponentielle et logarithme

Exercice 118. En admettant que toutes les quantités sont bien définies, déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses et corriger celles qui sont fausses.

1. Pour tous a, b réels, $e^{a\times b} = e^a \times e^b$.

2. Pour tous a, b réels, $e^a + e^b = e^{a+b}$.

3. $\ln x$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$.

4. Pour tous a, b réels strictement positifs, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

5. Pour tous a, b réels, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

6. Pour tous a, b réels, $b\exp(a) = \exp\left(a^b\right)$.

7. Pour tous a, b réels strictement positifs, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.

Exercice 119. Démontrer les égalités suivantes, pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. $\dfrac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$;

2. $\dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$;

3. $(e^x + e^{-x})(e^{2x})^2 = e^{3x}(e^{2x} + 1)$.

Exercice 120. Eva possède 1 000 € sur son compte. Chaque mois, elle prélève 5 % de la somme qu'il lui reste. Au bout de combien de mois lui restera t-il moins de 500 € sur son compte ? *(on ne cherchera pas à expliciter l'entier solution).*

Exercice 121. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.

3. Montrer que, pour tout réel x, $g(2x) = 2f(x)g(x)$.

11.7 Dérivation

Exercice 122. On considère la fonction h définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(-x) = h(x)$.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de h.
3. Montrer que la fonction h vérifie $h' = 1 - h^2$.

11.8 Variations d'une fonction

Exercice 123. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x + 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, qu'on notera D dans la suite.
2. Déterminer les limites de f aux extrémités de D. Interpréter graphiquement les limites obtenues.
3. Donner le tableau de variations complet de f.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{7}{4}$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 124. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}\big(-5x^2 - 5x - 1\big) + \dfrac{1}{2}$ définie sur $\mathbf{R}_+$.

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f.
2. **(a)** Montrer que $-3 + \sqrt{5} < 0$ et $-3 - \sqrt{5} < 0$.
(b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

Exercice 125. Déterminer les tableaux de variations complets des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + 1}$; **2.** $g(x) = \dfrac{5x - 2}{3x + 1}$; **3.** $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$.

11.9 Établir une inégalité

Exercice 126. **1.** Démontrer que, pour tout $x > 0$

$$\ln(x) \leq x - 1$$

2. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2}\ln(x) \leq \sqrt{x} - 1.$$

3. Montrer que, pour tout $x > 1$,

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x}.$$

4. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Exercice 127. *Pour la dernière question de cette exercice, il faut se rappeler du théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes) et du calcul de limites.*

1. Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\ln(1+x) - x \leq 0.$$

2. Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

3. En déduire que, pour tout $x > 0$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

4. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 128. Montrer que, pour tout $x \geq -3$,
$$(1+x)^3 \geq 1 + 3x.$$

Exercice 129. Soit x un réel appartenant à $[1\,;3]$. On pose $A = \dfrac{4x+1}{2x+1}$. L'objectif de cet exercice est d'encadrer le plus précisément possible le réel A. Dans la première question, on utilise l'expression initiale de A. Dans la seconde question, on transforme l'expression de A puis on obtient un autre encadrement, meilleur, de A.

1. Préciser successivement un encadrement de $4x+1$, de $2x+1$ puis de A.

2. Écrire A sous la forme $A = ? + \dfrac{?}{2x+1}$, où chaque ? désigne un rationnel explicitement connu. Déterminer alors un nouvel encadrement de A.

Exercice 130. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. On introduit, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$h(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1.$$
En étudiant la fonction h, déterminer son signe.

3. En déduire les variations de f.

4. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) - x = f(-x)$. En déduire le signe de $f(x) - x$.
Indication : on rappelle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geq x + 1$.